Modelos, Escalas e Semelhança

Paulo Jabardo

24-11-2023

INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS

Análise Dimensional

- As leis físicas não podem depender do sistema de unidades
- Todos os sistemas de unidades são equivalentes
- As dimensões de uma grandeza são monômios
- Teorema do Πs de Buckingham
- Escolher a classe do sistema de unidades
- Lucro???

GI Taylor: explosão nuclear

- 1940: Será que uma explosão com uma grande quantidade de energia seria efetiva?
- Um renomado especialista disse que o efeito mecânico não seria muito maior: perda por radiação.
- G. I. Taylor entra na jogada
- Resumindo: pode fazer que vai funcionar!
- 1950: Taylor publica artigo com dados de energia das bombas atômicas
- Visita da CIA/MI6/etc

O que fez G. I. Taylor?

O que acontece com o ar ambiente após a explosão?

- Após um curto tempo uma forte onda de choque aparece
- Movimento com simetria esférica
- O que envolve?
  - Equação da conservação de massa
  - Equação da conservação da quantidade de movimento
  - Equação da conservação de energia
- Problema complexo...

Problema ideal

- Quantidade finita de energia é liberada de maneira concentrada: $r_0 \equiv 0$
- Pressão na onde de choque muito maior que a pressão ambiente p_0

A questão é o raio da frente da onda r_f depende de quê?

1. E energia total da explosão
2. ρ_0 densidade do ar ambiente
3. t tempo a partir do instante da explosão
4. r_0 raio inicial da onda de choque
5. p_0 Pressão ambiente
6. γ Coeficiente adiabático

Classe e unidades

- $$[E] = J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$
- $$[\rho_0] = \frac{kg}{m^3}$$
- $$[t] = s$$
- $$[p_0] = \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

$$r_f = r_f\left(t, r_0, p_0, \rho_0, E, \gamma\right)$$

Chegamos a algo bem complicado...

E se desprezarmos r_0 e p_0?

$$r_f = r_f\left(t, \rho_0, E, \gamma\right)$$

Escala de comprimento:

$$R = \left(\frac{E \cdot t^2}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}$$

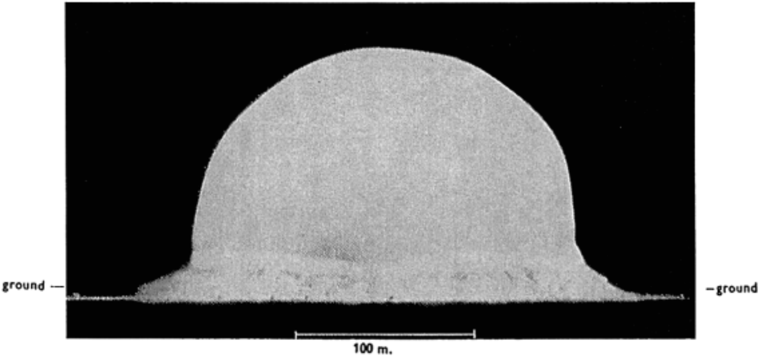
Temos

$$l = \frac{r_f}{R} = F\left(R, t, \rho_0, \gamma\right)$$

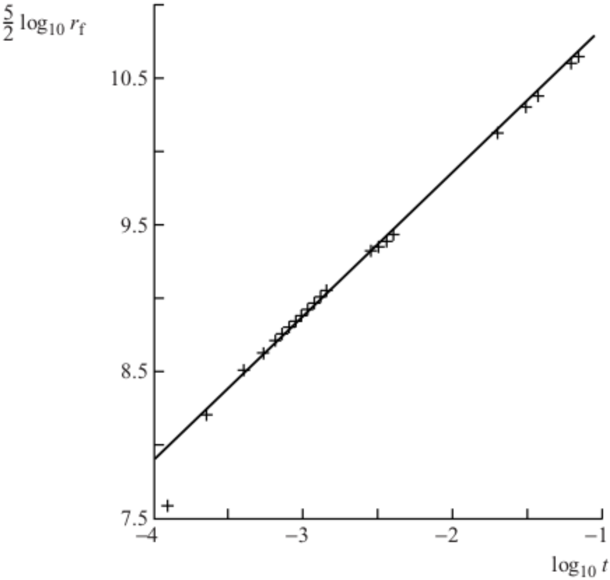
Três argumentos de F têm dimensões independentes. Variando a unidade de t, nada muda! Mesma coisa se mudarmos a unidade de massa! Variando a unidade de comprimento, r_f varia mas não l

$$r_f = C(\gamma)\left(\frac{E \cdot t^2}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Vídeo da explosão



Será que o modelo funciona?



E as outras grandezas na onda de choque?

- $$p_f = C_p(\gamma)\left(\frac{E \cdot t^2}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}$$
- $$\rho_f = C_\rho(\gamma)\rho_0$$
- $$u_f = C_u(\gamma)\left(\frac{E}{t^3\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Mas e dentro da onda de choque?

Autosemelhança!

- $$p = p_f P\left(\frac{r}{r_f}, \gamma\right)$$
- $$\rho = \rho_f R\left(\frac{r}{r_f}, \gamma\right)$$
- $$u = u_f V\left(\frac{r}{r_f}, \gamma\right)$$

Pêndulo simples

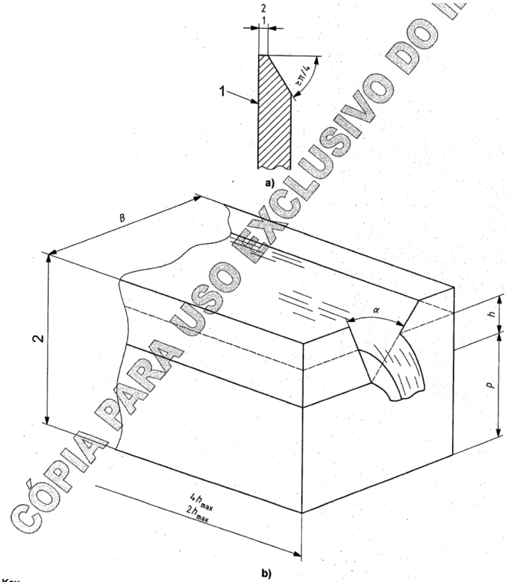
Qual o período θ de um pêndulo de comprimento l, massa m e aceleração da gravidade g?

$$[\theta] = T \qquad [l] = L \qquad [m] = M \qquad [g] = LT^{-2}$$

$n = k = 3$, portanto temos apenas 1 adimensional:

$$\Pi = \frac{\theta}{l^{1/2} g^{-1/2}} \quad \longrightarrow \quad \theta = const \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Vazão em um vertedouro



Key

1 upstream face of weir plate

2 head measurement section

Vertedouro: parâmetros e dimensões

$$Q = f(g, h, \alpha)$$

- $[Q] = L^3/T$, Vazão de fluido
- $[g] = L/T^2$, aceleração da gravidade
- $[h] = L$, nível da água
- $[\alpha] = 1$, ângulo do “V”

E a viscosidade?

Vertedouro

$$\Pi_1 = \alpha$$

$$\Pi_2 = \frac{Q}{g^{1/2} \cdot h^{5/2}}$$

$$\Pi_2 = C(\Pi_1) = C(\alpha)$$

$$Q = C(\alpha) \cdot \sqrt{g} \cdot h^{5/2}$$

Norma ISO-1438:2008, equação de Kindsvater-Shen:

$$Q = C_d \frac{8}{15} \tan\frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} h^{5/2} \qquad C_d = f\left(\frac{h}{p}, \frac{p}{B}, \alpha\right)$$

Gradiente de pressão em tubulação

$$\frac{dp}{dx} = f(U, D, \rho, \mu)$$

As dimensões:

$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = \frac{M}{L^2T^2}, \quad [U] = \frac{L}{T}, \quad [D] = L, \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}, \quad [\mu] = \frac{M}{LT}$$

$k = 3$, $m = 1$:

$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = [U]^2[D]^{-1}[\rho] \quad \longrightarrow \quad \Pi = \frac{dp/dx}{U^2D^{-}-1\rho}$$

$$[\mu] = [U][D][\rho] \quad \longrightarrow \quad \Pi_1 = \frac{\mu}{\rho UD} = \frac{1}{Re}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{U^2}{D}\rho\Phi\left(\frac{\mu}{\rho UD}\right)$$

Remo (McMahon, 1971)

Tempo de corrida de barcos a remo com número variável de remadores. Hipóteses:

1. Semelhança entre barcos
2. Volume deslocado por cada remador G é constante
3. Potência por remador é constante e o mesmo para todas as classes
4. O que impede o deslocamento é a força de arrasto viscosa. Ondas são desprezadas: potência de arrasto: $P = \lambda \rho v^3 l^2 = A \cdot N$

A velocidade depende dos parâmetros N, A, G, e ρ

Parâmetros e dimensões

$$v = v(N, A, G, \rho)$$

Dimensões

$$[v] = V, \quad [G] = \frac{L^3}{N}, \quad [A] = \frac{RV^3L^2}{N}, \quad [\rho] = R, \quad [N] = N$$

$$\Pi = \frac{G^{2/9}\rho^{1/3}v}{A^{1/3}N^{1/9}} \quad \longrightarrow \quad v = const \cdot \frac{A^{1/3}}{\rho^{1/3}G^{2/9}} \cdot N^{1/9}$$

Resultados em várias competições