Camada limite

Paulo Jabardo

24-11-2023

INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS

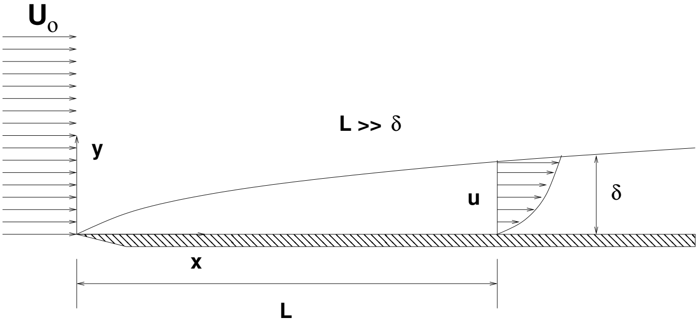
Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \qquad \nabla_* \cdot \mathbf{u}_* = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_* = 0$$

Primeira tentação: $Re \to \infty$ - *desprezar o termo difusivo*

Camada Limite



Navier-Stokes

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} & + & \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} & = & -\frac{1}{\rho}\nabla p & + & \nu\nabla^2\mathbf{u} \\
\mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{L}\right) & & \mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{L}\right) & & \mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{L}\right) & & \xcancel{\mathcal{O}\left(\nu\frac{U_0}{L^2}\right)} \\
 & & & & & & \mathcal{O}\left(\nu\frac{U_0}{\delta^2}\right)
\end{array}
$$

Aí temos a estimativa

$$
\frac{U_0^2}{L} \sim \nu\frac{U_0}{\delta^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{1}{Re}}
$$

Navier-Stokes 2D, regime permanente

$$
\begin{aligned}
u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} &= -\frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2}\right) \\
u_* \frac{\partial v_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} &= -\frac{\partial p_*}{\partial y_*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 v_*}{\partial y_*^2}\right) \\
\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} &= 0
\end{aligned}
$$

Escalas do problema

Hipóteses: 2D, regime permanente

- $x \sim L$
- $y \sim \delta$
- $u \sim U_0$
- $v \sim ???$
- $p \sim ???$

$$\delta_* = \frac{\delta}{L}$$

Escalas do problema

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{U_0}{L} + \frac{V_0}{\delta} \sim 0 \quad \longrightarrow \quad V_0 \sim \frac{\delta}{L} \times U_0$$

$$\begin{array}{cccccccc}
u_* & \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + & v_* & \frac{\partial u_*}{\partial y_*} = & -\frac{\partial p_*}{\partial x_*} + & \frac{1}{Re} & \left(\frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \right. & \left. \frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2}\right) \\
1 & \frac{1}{1} & \delta^* & \frac{1}{\delta^*} & ? & \ll 1 & 1 & \frac{1}{\delta_*^2}
\end{array}$$

$$\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2}\right) \sim 1 \quad \longrightarrow \quad Re \sim \frac{1}{\delta_*^2}$$

E na direção y?

$$
\begin{array}{cccccccc}
u_* & \dfrac{\partial v_*}{\partial x_*} + & v_* & \dfrac{\partial v_*}{\partial y_*} = & -\dfrac{\partial p_*}{\partial y_*} + & \dfrac{1}{Re} & \left(\dfrac{\partial^2 v_*}{\partial x_*^2} + \right. & \left. \dfrac{\partial^2 v_*}{\partial y_*^2} \right) \\
1 & \delta_* & \delta_* & 1 & ? & \delta_*^2 & \delta_* & \dfrac{1}{\delta_*}
\end{array}
$$

de modo que

$$\frac{\partial p_*}{\partial y_*} = \mathcal{O}\left(\delta_*\right) \approx 0$$

Ou seja:

$$p_* = p_*(x)$$

A pressão é imposta de fora na camada limite!!!

O que conseguimos?

$$
\begin{aligned}
u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} &= -\left[\frac{dp_*}{dx_*}\right] + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2} \\
p_* &= p_*(x_*) \\
\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} &= 0
\end{aligned}
$$

Equação elíptica $\longrightarrow$ equação parabólica.

Solução de Blasius

Será que δ é sufuciente? Para L sim mas e para $x < L$? O certo:

$$\delta = \delta(x)$$

Então temos uma escala que muda com x:

$$y_* = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\delta(x)} = \eta$$

O campo de velocidade é dados por:

$$\frac{u}{U_0} = g\left[\frac{y}{\delta(x)}\right] = g(\eta)$$

Função corrente ψ

$$\psi = U_0 \delta(x) f(\eta) \qquad \frac{u}{U_0} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = f'(\eta) = g(\eta)$$

$$\frac{v}{U_0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\delta}{dx}\left(\eta f' - f\right)$$

Mas quanto vale $\delta(x)$? Já calculamos uma estimativa antes!

$$\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{2}{Re_x}} \quad \longrightarrow \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$$

Equações da Camada Limite

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -U_0 \eta f'' \frac{d\delta}{dx}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_0 \cdot f''}{\delta}, \quad \frac{U_0 \cdot f'''}{\delta^2}$$

chega-se à seguinte equação:

$$\frac{U_0^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} ff'' + \frac{\nu U_0}{\delta^2} f''' = 0$$

Auto-semelhança

Se esta equação não depende de x temos auto-semelhança!

$$\frac{U_0^2}{\delta}\frac{d\delta}{dx}ff'' + \frac{\nu U_0}{\delta^2}f''' = 0$$

Para isso

$$\frac{U_0^2}{\delta}\frac{d\delta}{dx} \propto \frac{\nu U_0}{\delta^2} \quad \longrightarrow \quad \delta^2 \propto \frac{\nu x}{U_0} + const \quad \longrightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}}$$

Solução de Blasius

$$ff'' + f''' = 0$$

com as seguintes condições de contorno:

$$f = f' = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 0$$

$$f' \longrightarrow 1 \quad \text{quando} \quad \eta \longrightarrow \infty$$

Limitações

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}} = \sqrt{\frac{2}{Re_x}}$$

O que acontece quando $Re_x \to 0$? Singular
Camada limite:

- Duas escalas bem distintas δ, L
- Quando Re_x é pequeno, $\delta \sim x$

Exercícios

- Como resolver a solução de Blasius em um CFD tradicional? Qual a malha e as condições de contorno
- Tutorial do programa SU2
  `https://su2code.github.io/`
- Programa para solução de camada limite TEXSTAN
  `http://texstan.com/`
  - "Convective Heat and Mass Transfer" de Kays e Crawford
  - Longa história
  - Muito rápido
  - Bom lugar para testar modelos de turbulência
  - Alguém quer ajudar a desenvolver uma alternativa livre?