Modelos, Escalas e Semelhança

Paulo Jabardo

24-11-2023

INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS

Análise Dimensional

Agora vamos entrar na Análise Dimensional de verdade
Mas o que fizemos na aula passada?

- Postulamos um modelo matemático - equação diferencial
- Identificamos as escalas do problema
- Usamos estas escalas para comparar os diferentes termos da equação
- De acordo com estimatives, desprezamos alguns termos
- Será que precisamos das equações diferenciais?

NÃO - só comparando estimativas das diferentes contribuições chegamos ao método simplificado.
Dá para fazer isso de maneira mais abstrata?

Escoamento ao redor da esfera

$$F = F(U, D, \rho, \mu)$$

- F - força de arrasto, $N = kg \cdot m/s^2$
- U - Velocidade da esfera, m/s
- D - diâmetro da esfera, m
- ρ - massa específica do fluido, kg/m^3
- μ viscosidade do fluido, $Pa \cdot s = kg/(m \cdot s)$

Será que podemos usar outras unidades?

Mudando o sistema de unidades

Se mudarmos a unidade de comprimento de *m* para *mm*, multiplicamos o comprimento por um fator $L = 1000$. Os novos valores das grandezas variam de acordo com estas regras:

- $D' \longrightarrow L \cdot D$
- $U' \longrightarrow L \cdot U$
- $\rho' \longrightarrow \rho / L^3$
- $\mu' \longrightarrow \mu / L$
- $F' \longrightarrow L \cdot F$

Podemos mudar outras unidades

- Comprimento: L
- Tempo: T
- Massa: M

Então no novo sistema de unidades:

- $D' \longrightarrow (L) \cdot D$
- $U' \longrightarrow (L/T) \cdot U$
- $\rho' \longrightarrow (M/L^3) \cdot \rho$
- $\mu' \longrightarrow \{M/(L \cdot T)\} \cdot \mu$
- $F' \longrightarrow (M \cdot L/T^2) \cdot F$

Sistema de unidades específico para *meu problema*

Quero que no novo sistema de unidades, o valor numérico de D, U, ρ seja **1**!
Para o comprimento,

$$L \cdot D = 1 \quad \longrightarrow \quad L = \frac{1}{D}$$

Já para a velocidade,

$$\frac{L}{T} \cdot U = 1 \quad \longrightarrow \quad T = \frac{U}{D}$$

para a densidade,

$$\frac{M}{L^3} \cdot \rho = 1 \quad \longrightarrow \quad M = \frac{1}{\rho D^3}$$

Relação funcional no novo sistema de unidades

$$\frac{M}{L \cdot T} \cdot \mu = \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{1}{Re}$$

$$\frac{M \cdot L}{T^2} \cdot F = \frac{F}{\rho D^2 U^2} = C_D$$

$1/Re$ é o valor da viscosidade neste novo sistema de unidades e C_D é o valor da força neste novo sistema de unidades onde $D' = U' = \rho' = 1$

Re e C_D independem do sistema de unidades

$$Re' = \frac{\rho' U' D'}{\mu'} = \frac{\rho(M/L^3)\cdot U(L/T)\cdot D(L)}{\mu M/(L\cdot T)} = \frac{\rho U D}{\mu} = Re$$

$$C_D' = \frac{F'}{\rho' D'^2 U'^2} = \frac{F(M\cdot L/T^2)}{\rho(M/L^3)\cdot D^2(L^2)\cdot U^2(L^2/T^2)} = \frac{F}{\rho D^2 U^2} = C_D$$

A relação funcional no novo sistema de unidades

$$\frac{F}{\rho D^2 U^2} = F\left(1, 1, 1, \frac{1}{Re}\right)$$

ou seja

$$C_D = C_D(Re)$$

Parece mágica né?

Mas nem tanto...

- Velocidade:

$$U = \frac{L}{t}$$

- Força:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

- Densidade

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{L^3}$$

- Viscosidade

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{L^2} = \mu\frac{U}{L}$$

Mas e se a física for mais complicada?

Escoamento compressível:

- Número de Mach:

$$M = \frac{U}{c}$$

- Coeficiente isoentrópico γ:

$$p \propto \rho^{\gamma}$$

Unidades

Usamos unidades sem pensar muito

- metro
- segundo
- kilograma
- Nós
- km/h
- Newtons
- $kg \cdot m/s^2$

Unidades simples e derivadas

- m, s, kg, A, K - Unidades simples
- km/h, kg/m^3, W/mK, N - Unidades compostas

As unidades compostas são formadas a partir de leis físicas combinando unidades simples:

- $U = L/t$
- $F = ma$
- $\rho = m/L^3$

Esta distinção não é tão clara quanto parece: metro

Definições do metro

- 1791: $1/10.000.000$ da distância do equador ao polo Norte
- 1799: Comprimento de uma barra guardada em algum lugar
- 1889: Uma nova barra
- 1960: Certo número de comprimentos de onda de uma linha de emissão Kr-86
- 1983: Distância que a luz viaja no vácuo durante $1/299.792.458$ segundos
- 2019: Mesma coisa mas a definição do segundo mudou

Não seria o metro uma unidade derivada a partir de 1983???

Outro exemplo: Força

No SI, o Newton é derivado usando a segunda lei da Newton $F = ma$.
Mas pega um livro em unidades inglesas:

$$F = \frac{m \cdot a}{g_c}$$

O que é esse g_c???

A força também pode ser definida a partir da gravitação universal:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Por quê não usar esta relação?

Sistema SI

- Tentativa de facilitar e racionalizar
- Hoje não depende de nenhum objeto físico
- Usa princípios físicos estabelecidos
- A medida que nossa compreensão da física melhora, as definições das unidade podem mudar (e mudaram várias vezes)
- Conveniência, confiabilidade e incerteza baixa
- Unidades de base e derivadas

Dimensão de uma grandeza

- Regra de como o valor *numérico* de uma grandeza muda ao se mudar as unidades de base.
- Comprimento: unidade reduz por um fator L o valor numérico da grandeza multiplica por L
- Velocidade: comprimento(L) / tempo(T), valor numérico da grandeza: multiplica por L/T
- Nossa notação de unidade representa isso de forma simbólica

Dimensão: notação de Maxwell

Unidades base variam por fatores L, T, M, etc
As grandezas numéricas variam de acordo com as regras

$$L^a \cdot T^b \cdot M^c \cdot \ldots$$

Força (F): unidade derivada. Em SI a $N \equiv kg \cdot m/s^2$. Notação de Maxwell:

$$[F] = \frac{M \cdot L}{T^2}$$

Classes de sistemas de unidades

O SI é definido para ser o mais geral possível e conveniente:

- Qualquer problema conhecido pode ser representado (quando isso não acontece: Nobel...)
- Existe redundância: temperatura

Mas e problemas específicos?

- Mecânica: comprimento, massa, tempo LMT
- Pode ser conveniente trabalha com LFT
- Estática: LF
- Calor: $QM\Theta$ (Flogiston...)
- Você usa o que for mais conveniente para o teu problema!!!

$$[u] = \phi(L, M, T, \ldots)$$

Porque as dimensões são sempre um monômio?

$$[u] = \phi(L, M, T, \dots) = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \dots$$

Por quê temos unidades da forma

$$\frac{kg \cdot m}{s^2}$$

e não

$$kg + m^2 - s^3$$

?????

TODOS OS SISTEMAS DE UNIDADE SÃO EQUIVALENTES!!!

Seja uma grandeza u

$$[u] = \phi(L, M, T, \ldots)$$

Mudando as unidades para sistema 1, o valor de u será

$$u_1 = u \cdot \phi(L_1, M_1, T_1, \ldots)$$

No sistema 2:

$$u_2 = u \cdot \phi(L_2, M_2, T_2, \ldots)$$

Dividindo u_2/u_1

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\phi(L_2, M_2, T_2, \ldots)}{\phi(L_1, M_1, T_1, \ldots)}$$

Mas TODOS os sistemas são equivalentes!

Considerando o sistema 1 como sistema de unidades original:

$$u_2 = u_1 \phi\left(\frac{L_2}{L_1}, \frac{M_2}{M_1}, \frac{T_2}{T_1}, \ldots\right)$$

ou seja

$$\frac{\phi\left(L_2, M_2, T_2, \ldots\right)}{\phi\left(L_1, M_1, T_1, \ldots\right)} = \phi\left(\frac{L_2}{L_1}, \frac{M_2}{M_1}, \frac{T_2}{T_1}, \ldots\right)$$

Derivando em relação a L_2 e fazendoo $L_2 = L_1 = L$

$$\frac{\partial_L \phi(L, M, T)}{\phi(L, M, T)} = \frac{1}{L}\partial_L \phi(1, 1, 1) = \frac{\alpha}{L}$$

ou seja

$$\phi(L, M, T) = L^\alpha C_1(M, T)$$

repetindo com $C_1(M, T)$

$$C_1 = M^\beta C_2(T) \quad \longrightarrow \quad C_2 = C_3 T^\gamma \quad \longrightarrow \quad \phi = C_3 L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

$$C_3 = 1 \quad \longrightarrow \quad \phi = L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

Grandezas dependentes e independentes

Escoamento incompressível ao redor da esfera:

- Classe *LMT*
- Parâmetros: *D*, *U*, ρ, μ e *F*
- $[D] = L = L^1 \cdot M^0 \cdot T^0$
- $[U] = L/T = L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1}$
- $[\rho] = M/L^3 = L^{-3} \cdot M^1 \cdot T^0$
- $[\mu] = M/(LT) = L^{-1} \cdot M^1 \cdot T^{-1}$
- $[F] = ML/T^2$

5 parâmetros e 3 dimensões na classe.
U e *D* são independentes:

$$[U]^x [D]^y = 1 \longrightarrow \frac{L^x}{T^x} L^y = 1 \longrightarrow y = 0, x = 0$$

U, D e ρ são independentes

$$[U]^x[D]^y[\rho]^z = 1 \longrightarrow \frac{L^x}{T^x} \cdot L^y \cdot \frac{M^z}{L^{3z}}$$

ou seja

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ -x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Única solução: $x = y = z = 0$

μ e F são dependentes

$$[U]^x[D]^y[\rho]^z[\mu]^w = 1 \longrightarrow \frac{L^x}{T^x} \cdot L^y \cdot \frac{M^z}{L^{3z}} \cdot \frac{M^w}{L^w \cdot T^w} = 1$$

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= w \\ -x &= w \\ z &= -w \end{aligned}$$

Admitindo $w = 1$,

$$w = 1, x = -1, y = -1, z = -1$$

$$[\mu] = [\rho][U][D] \quad \longrightarrow \quad \frac{[\rho][U][D]}{[\mu]} \equiv 1$$

Teorema dos Πs de Buckingham

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_K, b_1, b_2, \ldots, b_N)$$

- $a_1, \ldots, a_K$ são grandezas com dimensões independentes
- $b_1, \ldots, b_N$ são grandezas com dimensões dependentes
- a também tem grandeza dependente

$$\begin{aligned}
[a] &= [a_1]^{\alpha}[a_2]^{\beta} \cdots [a_K]^{\gamma} \\
[b_1] &= [a_1]^{\alpha_1}[a_2]^{\beta_1} \cdots [a_K]^{\gamma_1} \\
[b_2] &= [a_1]^{\alpha_2}[a_2]^{\beta_2} \cdots [a_K]^{\gamma_2} \\
&\cdots \\
[b_N] &= [a_1]^{\alpha_N}[a_2]^{\beta_N} \cdots [a_K]^{\gamma_N}
\end{aligned}$$

Teorema dos Πs de Buckingham

Calculamos α, β, ..., γ, α_1, β_1, ..., γ_1 , ... α_N, β_N, ..., γ_N
As grandezas

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \cdots a_K^{\gamma}}, \quad \Pi_1 = \frac{b_1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\beta_1} \cdots a_K^{\gamma_1}},$$

$$\Pi_2 = \frac{b_2}{a_1^{\alpha_2} a_2^{\beta_2} \cdots a_K^{\gamma_2}}, \ldots \Pi_N = \frac{b_N}{a_1^{\alpha_N} a_2^{\beta_N} \cdots a_K^{\gamma_N}}$$

Têm dimensão 1

Teorema dos Πs de Buckingham

Equação original:

$$\Pi \cdot \left(a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \cdots a_K^{\gamma}\right) = f\left(a_1, a_2, \ldots, a_K, \Pi_1 \cdot a_1^{\alpha_1} a_2^{\beta_1} \cdots a_K^{\gamma_1},\right.$$
$$\left.\Pi_2 \cdot a_1^{\alpha_2} a_2^{\beta_2} \cdots a_K^{\gamma_2}, \ldots, \Pi_N \cdot a_1^{\alpha_N} a_2^{\beta_N} \cdots a_K^{\gamma_N}\right)$$

ou seja

$$\Pi = \mathcal{F}\left(a_1, a_2, \ldots, a_K, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_N\right)$$

mas escolhendo um sistema de unidades onde, numericamente $a_1 = a_2 = \cdots = a_K = 1$:

$$\Pi = \Pi\left(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_N\right)$$

Semelhança

No modelo,

$$(\Pi)_m = \Pi\left\{(\Pi_1)_m, (\Pi_2)_m, \ldots, (\Pi_N)_m\right\}$$

No protótipo

$$(\Pi)_p = \Pi\left\{(\Pi_1)_p, (\Pi_2)_p, \ldots, (\Pi_N)_p\right\}$$

Caso,

$$(\Pi_1)_p = (\Pi_1)_m\,,\ (\Pi_2)_p = (\Pi_2)_m\,,\ \ldots\,,\ (\Pi_N)_p = (\Pi_N)_m$$

Então

$$(\Pi)_p = (\Pi)_m$$

Simplificação

Relação adimensional:

$$\Pi = \Pi\left(\Pi_1, \ldots \Pi_i, \ldots, \Pi_N\right)$$

Se

$$\lim_{\Pi_i \to \infty} \Pi\left(\Pi_1, \ldots \Pi_i, \ldots, \Pi_N\right) = \Pi\left(\Pi_1, \ldots \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1} \ldots, \Pi_N\right) = const$$

Podemos simplificar o problema!