Modelos, Escalas e Semelhança

Paulo Jabardo

17-11-2023

INSTITUTO DE
PESQUISAS
TECNOLÓGICAS

Apresentação

- Análise dimensional
- Por que não o nome tradicional???
- Qual a fixação com mecânica dos fluidos?
- Porque agora?

Estrutura

- Modelos e escalas
- Invariância e simetria
- Sabemos bastante: geometria e equações diferenciais
- Conseguimos simplificar bastante
- Análise dimensional
    - As leis físicas não podem depender do sistema de unidades
    - Dimensões e unidades
    - Porque as unidades são sempre monômios?
    - Teorema dos Πs de Buckingham
    - Semelhança e simplificação
- Exemplos

O que cai mais rápido? Uma bola de boliche ou uma pena?

Quem está respondendo?

- Estudante que acabou de fazer o vestibular
- Uma criança de 5 anos

Que tal fazer um experimento?

Observações sobre os experimentos

- Pena - Extremamente complexo quando cai no ar
- Penas - Também é complexo quando cai no vácuo (logo no comecinho)
- O ar tem efeito pequeno na bola de boliche
- O gatilho tem uma dinâmica complicadíssima
  - Elasticidade do sistema
  - Atrito da argola
  - dinâmica do cabo que segura a bola

Algumas escalas do sistema

- Peso da bola de boliche
- $t_{gatilho}$ - Escala de tempo para começar cair
- Geometria: diâmetro, área, volume, rugosidade esfericidade, etc
- outros...

Velocidade terminal da bola

$$ma = mg - F_a$$

$$F_a = C_D \times A \times \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$ma = 0 \longrightarrow F_a = mg \longrightarrow U_{terminal} = \sqrt{\frac{2mg}{C_D A \rho}}$$

Chegamos na equação diferencial

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg + C_D A \frac{1}{2}\rho\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Mase e uma bexiga de hélio?

Temos que adicionar o empuxo!

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg + \frac{\pi\rho g D^3}{6} + C_D\frac{\pi D^2}{4}\frac{1}{2}\rho\frac{dz}{dt}\left|\frac{dz}{dt}\right|$$

Será que esse modelo é completo?

- Claramente não no caso geral
- Talvez para um corpo rígido? Mais ou menos...
- Se quiser tratar o problema completo, você vai ficar louco!!!

Qualquer (?) problema físico

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0$$

Modelo

- Equação (ou equações)
- Aproximações de X_i
- $|X_k| \ll |X_i|$ posso desprezar X_k ou pelo menos usar um modelo simples
- Se um termo cresce, os outros precisam diminuir...

Um outro problema simples

- Fluxo de ar constante
- Passando por um aquecedor elétrico com potência constante
- Termino o experimento
- **Desligo o aquecedor**
- Aumento a vazão de ar
- O que acontece com a temperatura do ar de saída?

Três frases que definem bem a modelagem

L. Tolstói

Famílias felizes são felizes da mesma maneira, famílias infelizes são miseráveis cada um de um jeito único.

H. L. Mencken (Scopes Monkey trial)

Todo problema complexo tem uma soluçao simples, elegante e errada.

Ditados populares

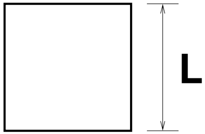
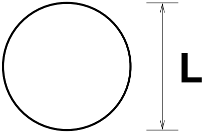
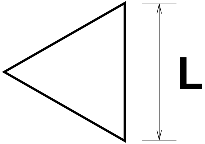
Más vale malo conocido que bueno por conocer.

Más sabe el diablo por viejo que por diablo

Modelos físicos X modelos matemáticos

- Não farei distinções!
- Em sentido abstrato as dificuldades são as mesmas
- Em um modelo matemático, fixou as equações fixou o modelo
- Em um mdelo físico, fixou as condições de laboratório, fixou o modelo
- Fácil ”fixar”a física em um modelo matemático
- Alguns problemas físicos intratáveis matematicamente são ”simples”no laboratório

Um pouco de geometria

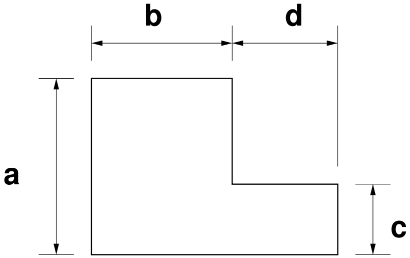
Geometria			
Área	L^2	$\pi D^2/4$	$\sqrt{3}/4L^2$
Perímetro	$4L$	πD	$3L$

$$A \sim L^2$$

$$P \sim L$$

$$\frac{A}{L^2} = k_1 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{P}{L} = k_2$$

Isso vale mesmo para geometrias mais “complexas”



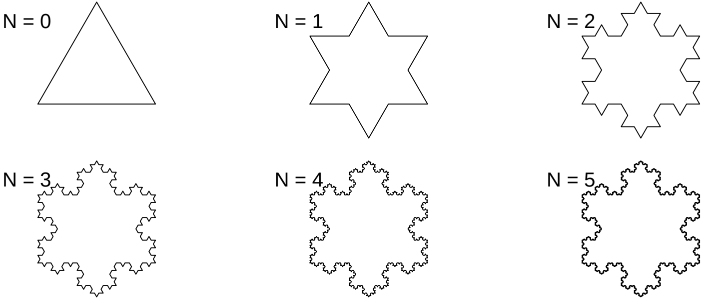
Area: $A = a \cdot b + c \cdot d$, perímetro: $P = a + 2b + 2d + c$.

$$b = \alpha_1 \cdot a, \qquad d = \alpha_2 \cdot a, \qquad c = \alpha_3 \cdot a$$

A área e o perímetro desta figura geométrica são dadas por:

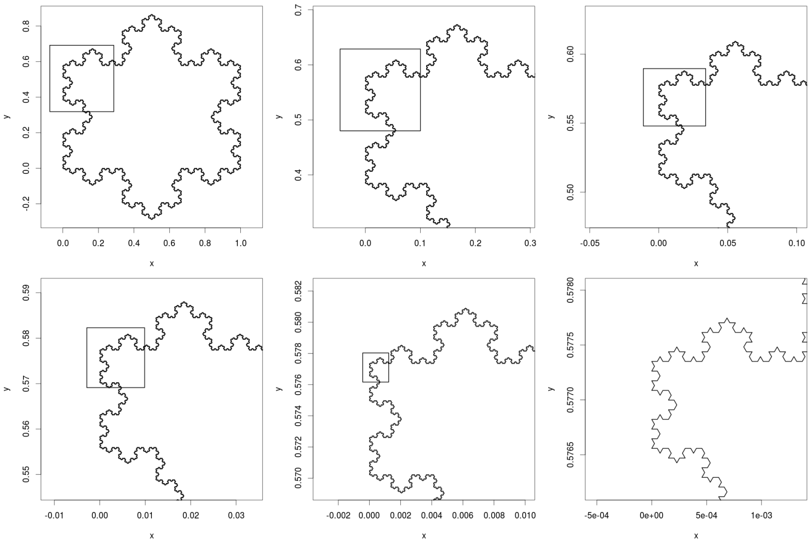
$$\frac{A}{a^2} = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \alpha_3) \qquad \frac{P}{a} = (1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$$

Floco de Koch

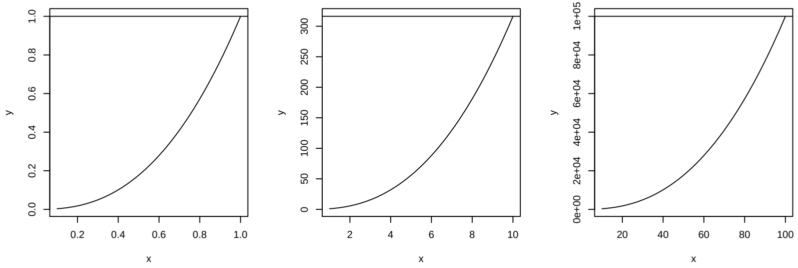


$$\frac{A}{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{20} \cdot \left[8 - 3 \left(\frac{4}{9} \right)^N \right] \quad \longrightarrow \quad \frac{P}{L} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^N$$

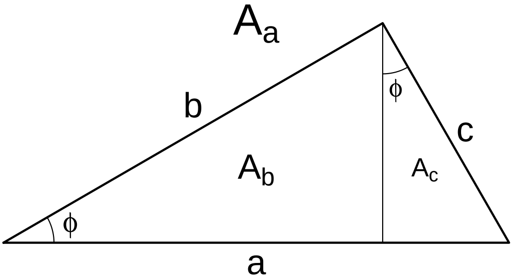
Floco de Koch - Autossemelhança



Leis de potência - Autossemelhança



Teorema de Pitágoras



$$A(h, \phi) = h^2 \cdot f(\phi)$$

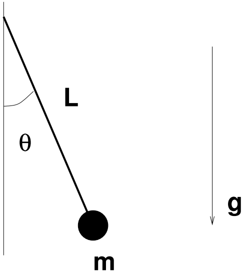
$$A_a a^2 \cdot f(\phi) = A_b + A_c = b^2 \cdot f(\phi) + c^2 \cdot f(\phi)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Nós sabemos muito!

- Ninguém aqui vai ganhar premio Nobel!
- A física básica já é conhecida!
- Mas ainda não sabemos de todas as suas nuances
- Um problema só é “tratável” se simplificarmos
- Ciência é reducionista
- O mais importante é saber o que desprezar!

Pendulo simples



Redução do modelo

- Vamos desprezar radiação solar
- Vamos desprezar a variação de **g**
- Vamos desprezar a força de Coriolis
- O fio é perfeitamente rígido e sem massa e diâmetro nulo
- Vamos desprezar o atrito
- outros e mais outros...

Redução do modelo

Esfera de aço de 1cm, L=1 m, velocidade de 1 m/s

Força	Expressão	% gravidade
Gravidade	$F_g = mg$	0.04 N
Atrito	$F_a = C_D 1/2 \rho_a U^2 A$	0.1%
Coriolis	$F_c = 2m\Omega \sin\phi$	6×10^{-4} %
Radiação solar	$10\mu N/m^2 \times A$	2×10^{-6} %

Modelo matemático simples

$$m \cdot L^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + m \cdot g \cdot L \cdot \sin\theta = 0$$

com as seguintes condições de contorno:

$$t = 0 \quad \longrightarrow \quad \theta = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{L}{g}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0$$

Escolher a régua certa

$$t_* = \frac{t}{t_0} \quad \longrightarrow \qquad \text{onde} \quad t_0 = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

chega-se à equação adimensional

$$\frac{d^2\theta}{dt_*^2} + \sin\theta = 0$$

Período de oscilação

Para θ_0 pequeno, $\sin\theta \approx \theta$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Em geral, temos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \varphi(\theta_0)$$

Difusão de calor em uma barra

$$u = u(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Condições de contorno e iniciais

- $u(x,0) = 0$
- $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = u_0$

Solução para $t \longrightarrow \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{x}{L}u_0$$

Barra infinita: autosemelhança

$$L \to \infty$$

Qual a escala de comprimento??? Tem que sair do próprio problema!

$$\frac{t\alpha}{L_0^2} = cte \longrightarrow L_0 = \sqrt{t\alpha} \longrightarrow \eta = \frac{x}{L_0} \longrightarrow \frac{u}{u_0} = f(\eta)$$

Mas η é uma escala que varia com o tempo!

Solução da barra infinita

Substituindo $u/u_0 = f(\eta)$:

$$f''(\eta) + \frac{\eta}{2} f'(\eta) = 0$$

com $f(0) = 0$ $\quad\quad$ $\lim_{\eta \to \infty} f(\eta) = 1$
Assim, chegamos à solução do problema:

$$f(\eta) = \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

Escoamento ao redor de uma esfera

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$r \longrightarrow \infty \quad \mathbf{u} \longrightarrow U_0 \hat{\mathbf{i}} \qquad r = \frac{D}{2} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Hipóteses:

- Mecânica do contínuo
- Fluido incompressível
- Propriedades constantes

Vamos usar uma régua adequada

$$x_* = \frac{x}{D}, \quad y_* = \frac{y}{D}, \quad z_* = \frac{z}{D}$$
$$\mathbf{u}_* = \frac{\mathbf{u}}{U_0}, \quad p_* = \frac{p}{P_0}, \quad t_* = \frac{t}{t_0} = \frac{tU_0}{D}$$

Chegamos à seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \qquad \nabla_* \cdot \mathbf{u}_* = 0$$

e as condições de contorno são:

$$r_* \longrightarrow \infty \quad \mathbf{u}_* \longrightarrow \hat{\mathbf{i}} \qquad\qquad r_* = \frac{1}{2}, \mathbf{u}_* = \mathbf{0}$$

O que ganhamos com isso?

Originalmente,

$$u = f(t, x, y, z, U_0, D, \mu, \rho), \qquad F_A = F_A(t, U_0, D, \mu, U_0)$$

Agora temos

$$u = U_0 \varphi\left(\frac{tU_0}{D}, \frac{x}{D}, \frac{y}{D}, \frac{z}{D}, \frac{\rho U_0 D}{\mu}\right), \qquad C_D = \frac{F_A}{\rho U_0^2 D^2} = C_D\left(\frac{\rho U_0 D}{\mu}\right)$$

Equações de Euler - $Re \longrightarrow \infty$

Se Re é muito grande e admitimos regime permanente,

$$\mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_*$$

Agora, conseguimos chegar a uma escala de pressão:

$$P_0 = \rho U_0^2$$

E se a velocidade ao longe varia?

$$U_\infty = U_0 \cdot (1 + \epsilon_0 \cdot \cos \omega_0 t)$$

Com isso chegamos a

$$\Omega \frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \qquad \Omega = \frac{D\omega_0}{U_0}$$

Originalmente tínhamos a escala de tempo $t_0 = D/U_0$ agora temos uma nova escala $t_1 = 1/\omega_0$.
Um novo adimensional:

$$\Omega = \frac{t_1}{t_0} = \frac{D\omega_0}{U_0}$$

E se a variação for mais complicada? (turbulência por exemplo)

Complicando o problema: vibração da esfera

Uma nova equação:

$$y''(t) + 2\zeta\omega_N y'(t) + \omega_N^2 y(t) = \frac{F_{fluido}(t)}{m}$$

Vamos usar a escalas de comprimento D e tempo $t_0 = D/U_0$:

$$\frac{d^2 y_*}{dt_*^2} + 2\frac{\zeta}{V_R}\frac{dy_*}{dt_*} + \frac{1}{V_R^2} y_* = \frac{\rho D^3}{m} \cdot \varphi(t_*)$$

$F_{fluido}(t) = \rho U_0^2 \times D^2 \varphi(t_*)$
Novos adimensionais

$$\frac{\rho D^3}{m} \qquad V_R = \frac{t_2}{t_0} = \frac{U_0}{\omega_N \cdot D} \qquad \frac{1}{t_2} = \omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

E usando a escala de tempo do oscilador no escoamento?

Invertemos o problema!

$$\frac{1}{V_R}\frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2}\nabla_* p_* + \frac{1}{Re}\nabla_*^2 \mathbf{u}_*$$

$$\frac{d^2 y_*}{dt_*^2} + 2\zeta \frac{dy_*}{dt_*} + y_* = \frac{\rho D^3}{m} \cdot V_R^2 \cdot \varphi_1\left(t_*\right)$$

O problema é o mesmo!

Semelhança

Parâmetros adimensionais:

- Aparecem na adimensionalização das equações
- Fixando estes adimensionais, temos famílias de soluções
- Semelhança: soluções com parâmetros diferentes de mas da mesma família

Processo simplificado

- Adimensionalizar dá trabalho
- As equações diferenciais são leis físicas simples
- Podemos aplicar estas leis simples diretamente a estimativas

Exemplo: esfera na base elástica

Forças agindo na esfera:

- Força elástica: $\mathcal{O}(k \cdot D)$
- Inércia da esfera: $\mathcal{O}(ma) \sim \mathcal{O}\left(m \cdot D/t_0^2\right) = \mathcal{O}\left(mU_0^2/D\right)$
- Força do fluido - viscosa: $\mu \partial U/\partial y A \sim \mu U_0 D$
- Força do fluido - forças de pressão: $\mathcal{O}\left(\rho U^2 D^2\right)$

Balanço das forças

$$\sum F_i = ma \longrightarrow \mathcal{O}\left(mU_0^2/D\right) = \mathcal{O}(kD) + \mathcal{O}(\mu U_0 D) + \mathcal{O}\left(\rho U^2 D^2\right)$$

A idéia é compara os diferentes termos. Então dividimos cada termo por um dos termos.

Dividindo a equação por um dos termos

- $\rho U_0^2 D^2$

$$\mathcal{O}\left(\frac{m}{\rho D^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{k}{\rho U_0^2 D}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu}{\rho U_0 D}\right) + \mathcal{O}(1)$$

- mU_0^2/D

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}\left(\frac{\omega_N^2 D^2}{U_0^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\rho D^3}{m}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu D^2}{mU_0}\right)$$

Semelhança (2)

- Diferentes adimensionais: $\Pi = \Pi\left(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_N\right)$
- Modelo e protótipo
- $\left(\Pi_k\right)_m = \left(\Pi_k\right)_p$

Desafio: Camada limite laminar e solução de Blasius